



青蛙過河

繼第十期數訊及其號外後，數學科在本年度再次為同學帶來另一份號外！大家有否玩過波子棋呢？波子棋的玩法是要按一定的規則，將同一種顏色的波子盡快移至對角；今期我們介紹的「青蛙過河」遊戲，其玩法與波子棋相似，但毋須棋盤，亦只限一人參與。現在就向大家講解這個智力遊戲的玩法及其數學知識吧。



遊戲玩法

選取空格（即上圖的荷葉）兩旁其中一隻青蛙，把牠移動到空格的位置。限制條件 1，被移動的青蛙只能跳過一隻青蛙，或直接跳到隔鄰的空格；限制條件 2，不能後退。上圖所示為 6 隻青蛙，你能以最少的移動次數將牠們對調嗎？（答案在後頁）依此方法，同學可以嘗試解決 8 隻、10 隻和 12 隻青蛙互相對調的問題，並留意每個情況最少的移動次數。

「青蛙過河」與數學的關係

這個遊戲與數列（sequence）有密切的關係。數列是按著一定規律排列的一列數字。設第 n 項（又稱通項）用 T_n 表示，數列 1, 2, 3, 4... 的第 n 項表示式便是 $T_n = n$ 。若我們知道數列第 n 項的表示式，則我們可以透過代入不同的 n 值而求得數列中任何一項。例如當 $T_n = 2n$ 時，第 9 項 T_9 便是 $T_9 = 2 \times 9 = 18$ 了。

在青蛙過河遊戲中，2 隻、4 隻、6 隻和 8 隻青蛙互相對調，所需最少的移動次數分別是 3、8、15 和 24。3, 8, 15, 24 便組成了一個數列的首四項。參看下表：

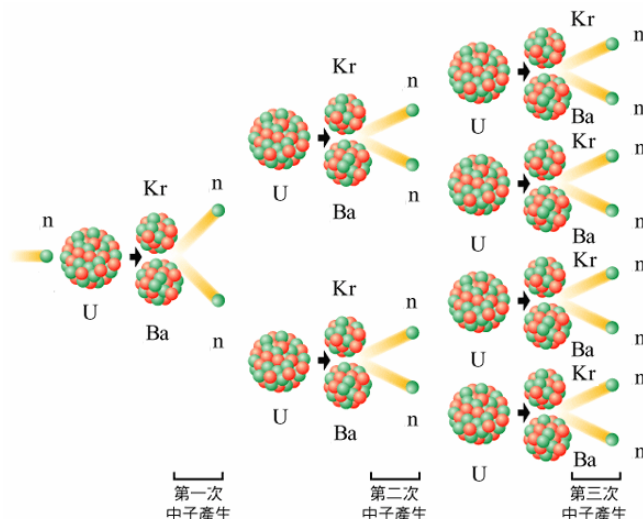
項	青蛙數目	最少移動次數
T_1	$2 = 2 \times 1$	$3 = 4 - 1 = 2^2 = (1+1)^2 - 1$
T_2	$4 = 2 \times 2$	$8 = 9 - 1 = 3^2 = (2+1)^2 - 1$
T_3	$6 = 2 \times 3$	$15 = 16 - 1 = 4^2 = (3+1)^2 - 1$
T_4	$8 = 2 \times 4$	$24 = 25 - 1 = 5^2 = (4+1)^2 - 1$
T_n	$2n = 2 \times n$	$(n+1)^2 - 1$

換句話說， $T_n = (n+1)^2 - 1$ ，其中 $2n$ 是青蛙的數目。當我們知道青蛙的數目，用這條公式就可以計算出最少移動的次數了。



生活中的數列——核電產生過程

核能是用作發電的能源之一。與傳統的發電廠不同，核電站依靠的是核子反應運作（我們附近的大亞灣核電站使用鈾的核子裂變作為能源）。在核電站中，鈾(U)裂變時放射出的中子(n)會引發其他鈾原子核的裂變，分裂成氪(Kr)、鋇(Ba)和中子(n)（如下圖所示）。這個過程不斷重複，在反應堆中產生了一個鏈式反應，不斷地產生中子(n)和能量。

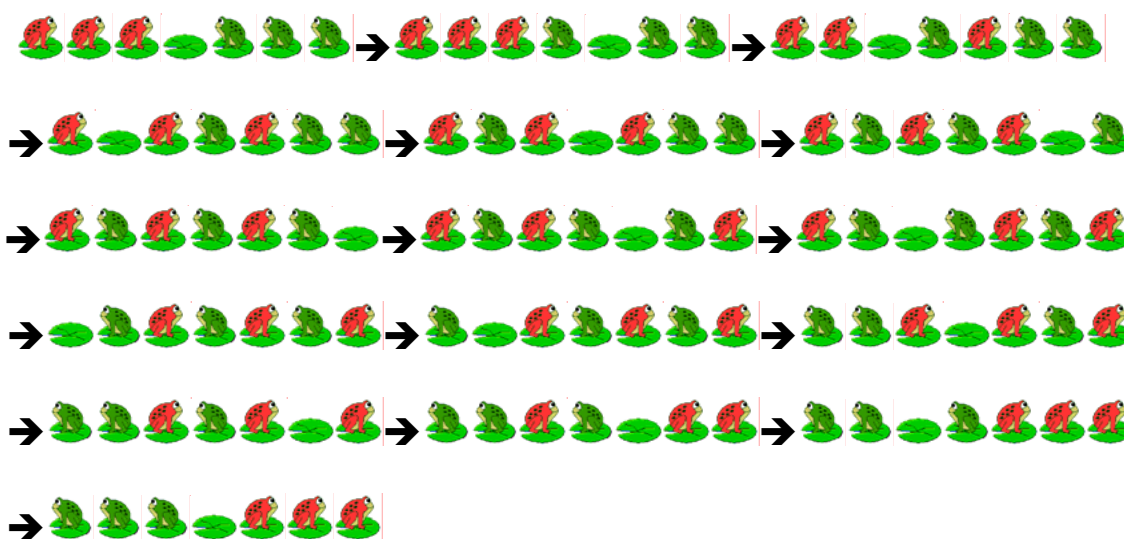


設第 m 次中子產生的數目為 T_m 。由上圖， $T_1 = 2$ ， $T_2 = 4$ 和 $T_3 = 8$ 。如此類推，我們可輕易求

得 $T_4 = 16$ 和 $T_5 = 32$ 。仔細觀察， $\frac{2}{2^1}$ ， $\frac{4}{2^2}$ ， $\frac{8}{2^3}$ ， $\frac{16}{2^4}$ ， $\frac{32}{2^5}$ 組成了一個數列的首五項，其中 $T_m = 2^m$ 。

同學們只要多注意、觀察和思考身邊的事物，便會發現日常生活中不少事物均與數學息息相關。努力續探索更多有趣的例子吧！

(6 隻青蛙過河答案)



本文參考網站：http://www.hk-phy.org/energy/power/print/nuclear_phy_print_c.html

本「號外」的電子版稍後可於學校數學科頁下載

編輯：葉嘉敏老師（實習）、薛昌華老師